ZUR INVARIANTENTHEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

INAUGURAL-DISSERTATION

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT GREIFSWALD
ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE
VORGELEGT UND NEBST DEN ANGEFÜGTEN THESEN
FREITAG, DEN 28. JULI 1905, MITTAGS 12 UHR
ÖFFENTLICH VERTEIDIGT VON

ALFRED KOPPISCH

OPPONENTEN:

HERR CAND. MATH. A. GREUL
HERR CAND. MATH. A. SÜSS
HERR CAND. MATH. K. WÜNSCHMANN

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1905

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät
der Königlichen Universität zu Greifswald.

Dekan: Geh. Regierungsrat Prof. Dr. SEECK.
Referent: Prof. Dr. ENGEL.

Einleitung.

Jeder gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad y'' = \omega(x, y, y') \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

können wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(2) \qquad b'' = \varphi(a, b, b') \qquad b' = \frac{db}{da}, \qquad b'' = \frac{d^2b}{da^2}$$

zuordnen, indem wir in der vollständigen Integralgleichung:

$$(3) \qquad y = f(x, a, b)$$

der Differentialgleichung (1) x, y als konstante Größen, a, b dagegen als Parameter auffassen.

Die Gleichung (3) bleibt Integralgleichung von (1), wenn wir die Größen a, b einer beliebigen Punkttransformation unterwerfen. Infolgedessen müssen wir der Gleichung (1) außer der Gleichung (2) in gleicher Weise jede Differentialgleichung zuordnen, die aus (2) durch Ausführung jeder beliebigen Punkttransformation hervorgeht.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, die Bedingungen zu ermitteln, denen $\omega(x, y, y')$ genügen muß, damit die der Differentialgleichung (1) entsprechenden Differentialgleichungen (2) einer bestimmten, bei der Gruppe aller Punkttransformationen invarianten Kategorie von Differentialgleichungen angehören. Eine solche Kategorie bilden alle Differentialgleichungen von einer bestimmten Form, in denen b'' in solcher Weise von b' abhängt, daß der Zusammenhang zwischen beiden bei der Gruppe aller Punkttransformationen invariant bleibt. Es ist dabei jedoch keineswegs notwendig, daß sich jede einzelne Gleichung der Kategorie durch eine Punkttransformation in jede andere Gleichung der Kategorie überführen läßt.

Kapitel I.

Invariante Kategorien von Differentialgleichungen.

Es ist bekannt, daß jede Differentialgleichung von der Form:

$$(4) \quad y'' = \alpha_0(x, y) - 3\alpha_1(x, y) \cdot y' + 3\alpha_2(x, y) \cdot y'^2 - \alpha_3(x, y) \cdot y'^3,$$

in der die α_i beliebige Funktionen von x und y sind, bei einer allgemeinen Punkttransformation ihrer Form nach invariant bleibt. Die Gleichung (4) stellt uns das einfachste Beispiel einer invarianten Kategorie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar.

Wir wollen jetzt annehmen, y'' sei durch eine algebraische Gleichung $n$ten Grades definiert, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von y' sind, und wollen untersuchen, wann eine solche Gleichung ihrer Form nach bei jeder beliebigen Punkttransformation invariant bleibt.[1])

Die Differentialgleichung, die wir zu betrachten haben, hat die Form:

$$(5) \qquad \sum_0^n {}^{\mu}\, g_{m_\mu}(y') \cdot y''^{\,n-\mu} = 0,$$

worin die $g_{m_\mu}(y')$ ganze rationale Funktionen $m_\mu$ten Grades von y' darstellen:

$$g_{m_\mu}(y') = \sum_0^{m_\mu} {}^{\nu}\, \alpha_{\mu\nu}(x, y) \cdot y'^{\nu}$$

Setzen wir hierin:

$$(6) \qquad y' = -\frac{p}{q}, \qquad y'' = \frac{\sigma}{q^3},$$

so geht die Gleichung (5) über in eine neue Gleichung von der Form:

$$(5') \qquad \sum_0^n {}^{\mu}\, \varphi_{i_\mu}(p, q) \cdot \sigma^{n-\mu} = 0$$

unter $\varphi_{i_\mu}(p, q)$ homogene Funktionen $i_\mu$ten Grades von p und q verstanden.

---

1) Für den folgenden Beweis vgl. Study, Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie. Leipziger Berichte 1901 und Engel, Die höheren Differentialquotienten. Leipziger Berichte 1902.

Führen wir eine allgemeine Punkttransformation aus:

$$x_1 = X(x, y), \qquad y_1 = Y(x, y),$$

berechnen wir die neuen Differentialquotienten y_1', y_1'' und führen wir vermöge (6) die Größen $p, q, \sigma, p_1, q_1, \sigma_1$ ein, so erhalten wir:

$$-\frac{p_1}{q_1} = \frac{Y_x \cdot q - Y_y \cdot p}{X_x \cdot q - X_y \cdot p}$$

$$\frac{\sigma_1}{q_1^3} = \frac{(Y_y X_x - Y_x X_y)\,\sigma + h_3(p, q)}{(X_x \cdot q - X_y p)^3}.$$

Es ist h_3 eine homogene Funktion dritten Grades von p und q. Bei einer allgemeinen Punkttransformation werden also p, q, σ in der folgenden Weise transformiert:

$$(7) \qquad \begin{cases} p_1 = \alpha p + \beta q \\ q_1 = \gamma p + \delta q \\ \sigma_1 = \varepsilon \cdot \sigma + \alpha_0 p^3 + \alpha_1 p^2 q + \alpha_2 p q^2 + \alpha_3 q^3, \end{cases}$$

worin die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \alpha_i$ Funktionen von x, y sind. Aus der letzten der Gleichungen (7) folgt:

Fassen wir p, q als homogene Größen erster Ordnung auf, so ist σ als homogene Größe dritter Ordnung zu betrachten. Eine Gleichung:

$$\varphi_{i_0} \sigma^n + \varphi_{i_1} \sigma^{n-1} + \cdots + \varphi_{i_{n-1}} \sigma + \varphi_{i_n} = 0,$$

in der die φ_{i_ν} homogene Funktionen $i_\nu$ten Grades von p und q sind, wird also dann und nur dann eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y darstellen, wenn:

$$i_\nu = i_0 + 3\nu$$

ist, sie hat, wenn wir statt i_0 jetzt m schreiben, stets die Form:

$$(8) \qquad \varphi_m \sigma^n + \varphi_{m+3} \sigma^{n-1} + \cdots + \varphi_{m+3k} \sigma^{n-k} + \cdots + \varphi_{m+3n} = 0.$$

Aus den Formeln (7) folgt weiterhin sofort:

„Jede Gleichung (8) bleibt bei der Gruppe aller Punkttransformationen ihrer Form nach invariant.“

Wenden wir das gefundene Ergebnis auf die Gleichung (5′) an und gehen wir rückwärts wieder zu der Gleichung (5) über, so folgt:

„Jede Differentialgleichung von der Form:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_0^n {}^\mu g_{m_\mu}(y') \cdot y''^{n-\mu} = 0 \\ g_{m_\mu}(y') = \sum_0^{m_\mu} {}^\nu \alpha_{\mu\nu}(x, y) \cdot y'^\nu \end{cases}$$

ist aufzufassen als eine Gleichung von der allgemeinen Form:

$$(8')\qquad \sum_0^n {}^\mu g_{m+3\mu}(y') \cdot y''^{n-\mu} = 0,$$

in die sie bei einer allgemeinen Punkttransformation sicher übergehen würde, dabei ist $m + 3\mu \geqq m_\mu$ und es muß mindestens für einen Wert μ das Gleichheitszeichen gelten. Jede Gleichung (8′) bleibt gegenüber allen Punkttransformationen ihrer Form nach invariant.“ Hieraus ergibt sich die weitere Folgerung:

Die Gleichung

$$(8')\qquad \sum_0^n {}^\mu g_{m+3\mu}(y') \cdot y''^{n-\mu} = 0$$

stellt für jedes Wertepaar n und m eine invariante Kategorie von Differentialgleichungen dar, sobald wir in $g_{m+3\mu}$ die Koeffizienten $\alpha_{\mu\nu}$ der verschiedenen Potenzen von y' als willkürliche Funktionen von x, y betrachten. Lassen wir n, m alle Werte annehmen, so erhalten wir alle invarianten Kategorieen von Differentialgleichungen der Form:

$$(5)\qquad \sum_0^n {}^\mu g_{m_\mu}(y') \cdot y''^{n-\mu} = 0.$$

Im folgenden soll es unsere Aufgabe sein, die Bedingungen zu ermitteln, denen ω genügen muß, damit jede der Differentialgleichung $y'' = \omega(x, y, y')$ zugeordnete Differentialgleichung $b'' = \varphi(a, b, b')$ einer bestimmten der obigen invarianten Kategorieen von Differentialgleichungen angehört.

Zur Behandlung dieser Aufgabe hat mich Herr Prof. Engel veranlaßt, der mich im März 1904 aufforderte, den Fall $m = 0$, $n = 1$ in Angriff zu nehmen, und der mich, als mir die Erledigung dieses Falles gelungen war, ermutigte, nach und nach auch die allgemeineren Fälle zu bearbeiten.

Es versteht sich von selbst, daß in jedem einzelnen Falle die Bedingungen, die wir für ω erhalten, eine bei allen Punkttransformationen invariante Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung definieren. Wir leisten dadurch einen Beitrag zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung gegenüber allen Punkttransformationen. Diese Invariantentheorie ist von anderem Gesichtspunkte aus von Tresse behandelt worden[1]), der die Frage nach allen Differentialinvarianten einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen vollständig erledigt hat. Wir finden nur gewisse invariante Eigenschaften, die durch gewisse partielle Differentialgleichungen für ω ausgedrückt werden, aber diese Differentialgleichungen können bei uns unmittelbar gedeutet werden, weil sie etwas über die Form der zugehörigen Differentialgleichungen zwischen a und b aussagen.

Kapitel II.

Der einfachste Fall: b'' ist eine ganze rationale Funktion von b'.

Wir wollen jetzt die Frage beantworten, welche Bedingungen für ω erfüllt sein müssen, damit die der Differentialgleichung $y'' = \omega(x, y, y')$ zugeordnete Differentialgleichung in a und b die Form:

$$(4)\quad b'' = \alpha_0(a, b) - 3\alpha_1(a, b)\cdot b' + 3\alpha_2(a, b)\cdot b'^2 - \alpha_3(a, b)\cdot b'^3$$

hat.

Denken wir uns die Differentialgleichung $y'' = \omega$ integriert, so ergibt ihre Integralgleichung:

$$(3)\qquad y = Y(x, a, b)$$

bei zweimaliger totaler Differentiation nach a:

$$(9)\qquad \begin{cases} b' = -\dfrac{y_a}{y_b} \\[2ex] b'' = -\dfrac{y_{aa}y_b^2 - 2y_{ab}y_a y_b + y_{bb}y_a^2}{y_b^3} \end{cases}$$

---

1) M. A Tresse, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. — Preisschrift der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1896.

Setzen wir dies in die Gleichung (4) ein, so kommen wir zu der Gleichung:

(10) $$-y_{aa}y_b^2+2y_{ab}y_a y_b-y_{bb}y_a^2=\alpha_0 y_b^3+3\alpha_1 y_b^2 y_a+3\alpha_2 y_b y_a^2+\alpha_3 y_a^3$$

Das identische Bestehen dieser Gleichung ist offenbar notwendig und vermöge (9) auch hinreichend, damit die der Differentialgleichung $y''=\omega$ entsprechende Differentialgleichung in a und b der invarianten Kategorie (4) angehört.

Die Gleichung (10), welche nach (4) und (9) die Form

(10′) $$f(x, a, b)=\sum_0^3{}_k\alpha_k(a, b)\cdot f_k(x, a, b)$$

hat, muß in x identisch erfüllt sein. Nun läßt sich zunächst beweisen, daß zwischen den Funktionen:

$$f_0=y_b^3,\quad f_1=3y_b^2y_a,\quad f_2=3y_by_a^2,\quad f_3=y_a^3$$

allein keine lineare Relation bestehen kann, deren Koeffizienten von x frei sind. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es bestünde eine Gleichung

(11) $$c_0y_b^3+c_1y_b^2y_a+c_2y_by_a^2+c_3y_a^3=0,$$

wo die c_k Funktionen von a, b allein wären. Statt a und b schreiben wir y_0 und y_0' und denken uns diese Werte so gewählt, daß y_0, y_0' die Anfangswerte von y, y' sind, wie sie sich bei der Integration von $y''=\omega$ für $x=x_0$ ergeben, unter x_0 eine willkürliche Konstante verstanden. Die Differentialquotienten berechnen sich aus der Reihenentwicklung:

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1}y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\omega_0+\dots$$

Erteilen wir jetzt in der Gleichung (11) x, y, y' ihre Anfangswerte, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$c_3=0.$$

Durch Differentiation von (11) nach x erhalten wir nunmehr:

$$3c_0y_b^2y_b'+c_1(2y_b'y_ay_b+y_b^2y_a')+c_2(y_b'y_a^2+2y_by_ay_a')=0$$

und hieraus ergibt sich bei der entsprechenden Einführung der Anfangswerte:

$$c_2=0.$$

Durch nochmalige Differentiation von (11) und Einführung der Anfangswerte folgt

$$c_1=0$$

und hieraus erhält man sofort auch:

$$c_0=0$$

Zwischen den betrachteten Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3 allein kann also keine lineare Relation mit von x freien, nicht identisch verschwindenden Koeffizienten bestehen. Hieraus folgt, daß:

$$\begin{vmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & f_3 \\ f'_0, & f'_1, & f'_2, & f'_3 \\ f''_0, & f''_1, & f''_2, & f''_3 \\ f'''_0, & f'''_1, & f'''_2, & f'''_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Dann stellt aber nach einem bekannten Satze die Gleichung:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} f, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, \\ f', & f'_0, & f'_1, & f'_2, & f'_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'''', & f''''_0, & f''''_1, & f''''_2, & f''''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

die wir durch Elimination der α_k aus der Gleichung

$$(10') \qquad f = \sum_0^3{}^k \alpha_k f_k$$

und den durch Differentiation nach x abgeleiteten Gleichungen

$$f^{(\nu)} = \sum_0^3{}^k \alpha_k f_k^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

erhalten, die notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür dar, daß eine und nur eine Gleichung (10') besteht.

Wir haben jetzt zu unserer Gleichung (10) die entsprechende Gleichung (12) aufzustellen, es ist jedoch nicht notwendig, die Determinante explizite zu bilden, wir können die Elimination der α_k auch schrittweise vornehmen.

Bei der Differentiation haben wir zu beachten, daß wir y''_a, y''_b, y''_{aa}, y''_{ab}, y''_{bb} mit Hilfe von $y'' = \omega$ ausdrücken können. Denken wir uns in $y'' = \omega(x, y, y')$ die Größen y, y', y'' durch ihre Werte als Funktionen von x, a, b ersetzt, so erhalten wir eine Identität, die bei der Differentiation nach a und b folgende Ausdrücke ergibt:

$$(13) \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} y_a = \dfrac{\partial}{\partial a} y'' = \omega_y y_a + \omega_{y'} y'_a \\ \dfrac{d^2}{dx^2} y_b = \dfrac{\partial}{\partial b} y'' = \omega_y y_b + \omega_{y'} y'_b \\ \dfrac{d^2}{dx^2} y_{aa} = \dfrac{\partial^2}{\partial a^2} y'' = \omega_{y'y'} y'^2_a + 2\omega_{yy'} y_a y'_a + \omega_{yy} y_a^2 + \omega_{y'} y'_{aa} + \omega_y y_{aa} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Um die etwas umständlichen Rechnungen zu vereinfachen, führen wir einige symbolische Bezeichnungen ein. Wir schreiben zunächst nach dem Vorbilde der Invariantentheorie:

$$(14)\qquad \alpha_0 u_b^3 + 3\alpha_1 u_b^2 u_a + 3\alpha_2 u_b u_a^2 + \alpha_3 u_a^3 = (\alpha_a u_a + \alpha_b u_b)^3,$$

wobei wir unter u eine ganz beliebige Funktion von x, a, b verstehen. Es haben α_a und α_b an sich keine Bedeutung, nur in den Verbindungen $\alpha_a^k \alpha_b^{3-k}$ sind sie definiert, denn es muß sein:

$$\alpha_a^k \alpha_b^{3-k} = \alpha_k. \qquad (k=0,1,2,3)$$

Zur weiteren Abkürzung schreiben wir noch:

$$\alpha_a u_a + \alpha_b u_b = (\alpha u).$$

Aus der Definition von (αu) ergibt sich für die Differentiation nach x sofort:

$$\frac{d}{dx}\{(\alpha u)(\alpha v)(\alpha w)\} = (\alpha u')(\alpha v)(\alpha w) + (\alpha u)(\alpha v')(\alpha w) + (\alpha u)(\alpha v)(\alpha w').$$

Ist speziell $u = y''$, so finden wir nach den Gleichungen (13):

$$(15)\qquad (\alpha y'') = \omega_y \cdot (\alpha y) + \omega_{y'} \cdot (\alpha y').$$

Wir wollen noch ein zweites Symbol einführen, indem wir

$$(16)\quad -u_{aa} v_b w_b + u_{ab}(v_a w_b + v_b w_a) - u_{bb} v_a w_a = |u;\, v,\, w|$$

setzen. Nach der Definition ist dann:

$$|u;\, v,\, w| = |u;\, w,\, v|.$$

Dieses Symbol gestattet uns, den Differentialquotienten des dargestellten Ausdrucks sofort in einfachster Weise hinzuschreiben:

$$\frac{d}{dx}|u;\, v,\, w| = |u';\, v,\, w| + |u;\, v',\, w| + |u;\, v,\, w'|$$

vermöge der Gleichung (13) erhalten wir im besonderen Falle:

$$(17)\left\{\begin{aligned} &|u;\, v,\, y''| = \omega_y \cdot |u;\, v,\, y| + \omega_{y'} |u;\, v,\, y'| \\ &|y'';\, v,\, w| = \omega_{y'y'} \cdot \begin{vmatrix} y_a', & v_a \\ y_b', & v_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_a, & y_a' \\ w_b, & y_b' \end{vmatrix} \\ &+ \omega_{yy'} \left\{ \begin{vmatrix} y_a, & w_a \\ y_b, & w_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_a, & y_a' \\ v_b, & y_b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_a, & v_a \\ y_b, & v_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_a, & y_a' \\ w_b, & y_b' \end{vmatrix} \right\} \\ &+ \omega_{yy} \begin{vmatrix} y_a, & v_a \\ y_b, & v_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_a, & y_a \\ w_b, & y_b \end{vmatrix} + \omega_{y'} \cdot |y';\, v,\, w| + \omega_y |y;\, v,\, w|. \end{aligned}\right.$$

Die letzte Formel vereinfacht sich noch wesentlich, wenn v oder w gleich y oder y' ist, da dann verschiedene der auftretenden Determinanten identisch verschwinden.

Die eingeführten Symbole und die für sie abgeleiteten Rechenregeln gestatten uns, ohne weitere Schwierigkeiten die gesuchte Bedingung für das Bestehen der Gleichung (10) abzuleiten. Wir können diese Gleichung jetzt in der folgenden Form schreiben:

$$\text{(I)} \qquad |y;\, y,\, y| = (\alpha y)^3.$$

Durch Differentiation nach x erhalten wir:

$$\text{(II)} \qquad |y';\, y,\, y| + 2\,|y;\, y,\, y'| = 3\,(\alpha y)^2 (\alpha y').$$

Differentiieren wir diese Gleichung nochmals nach x, setzen wir für $|y'';\, y,\, y|$, $|y;\, y,\, y''|$, $(\alpha y'')$ die Werte ein, wie sie sich nach (15) und (17) ergeben, und eliminieren wir $(\alpha y)^3$ und $(\alpha y)^2\ (\alpha y')$ vermöge der Gleichungen (I) und (II), so erhalten wir die Gleichung:

$$\text{(III)} \quad -\omega_{y'y'} \cdot \Delta^2 + 2\,|y;\, y',\, y'| + 4\,|y';\, y,\, y'| = 6\,(\alpha y)(\alpha y')^2.$$

Hierin bedeutet Δ die Funktionaldeterminante von y und y' als Funktionen von a und b:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_a, & y'_a \\ y_b, & y'_b \end{vmatrix}.$$

Diese verschwindet nicht, da sonst aus den Gleichungen $y = y(x, a, b)$ und $y' = y_x$ eine von a und b freie Relation, also eine Differentialgleichung in x, y von nur erster Ordnung folgen würde.

Die Gleichung (III) haben wir nochmals zu differentiieren, eliminieren wir dann y'' vermöge der Gleichungen (15) und (17) und $(\alpha y)^2 (\alpha y')$ und $(\alpha y)(\alpha y')^2$ mit Hilfe der Gleichungen (II) und (III) und beachten wir schließlich, daß

$$\frac{d\Delta}{dx} = \omega_{y'} \cdot \Delta$$

ist, so kommen wir zu der Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad \left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\,\omega_{yy'}\right)\Delta^2 + 6\,|y';\, y',\, y'| = 6\,(\alpha y')^3.$$

Um die α_k eliminieren zu können, müssen wir noch ein letztes Mal differentiieren. Durch Elimination von y'' vermöge (15) und (17) und von $(\alpha y)(\alpha y')^2$ und $(\alpha y')^3$ mit Hilfe der Gleichungen (III und (IV) erhalten wir endlich die Gleichung:

$$
\text{(V)}\quad \begin{aligned} &\Delta^2 \cdot \Big\{- \frac{d^2 \omega_{y'y'}}{dx^2} + 4 \frac{d\omega_{yy'}}{dx} - 6\omega_{yy} - \\ &- \omega_{y'}\Big(- \frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\omega_{yy'}\Big) + 3\omega_y \omega_{y'y'}\Big\} = 0. \end{aligned}
$$

Da $\Delta \neq 0$ ist, so muß der andere Faktor verschwinden. Dies ergibt eine Bedingung für die Funktion ω allein, die erfüllt sein muß, damit die Gleichung (V) besteht. Da diese Relation durch Elimination der α_k aus der Gleichung (I) und den durch Differentiation nach x abgeleiteten Gleichungen erhalten wird, so stellt sie zugleich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß eine und nur eine Gleichung von der Form (I) besteht. Diese war wiederum die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung in a und b die Form (4) hatte. Wir haben somit bewiesen:

„Soll die zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \omega(x, y, y')$ gehörige Differentialgleichung $b'' = \varphi(a, b, b')$ die Form:

$$
(4)\quad b'' = \alpha_0(a, b) - 3\alpha_1(a, b) \cdot b' + 3\alpha_2(a, b) \cdot b'^2 - \alpha_3(a, b) b'^3
$$

haben, so ist notwendig und hinreichend, daß ω der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$
(18)\quad - \frac{d^2 \omega_{y'y'}}{dx^2} + 4 \frac{d\omega_{yy'}}{dx} - 6\omega_{yy} - \omega_{y'}\Big(- \frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\omega_{yy'}\Big) + 3\omega_y \omega_{y'y'} = 0
$$

genügt."

Führen wir statt a und b die Anfangswerte y_0 und y_0' ein, indem wir setzen $a = y_0$, $b = y_0'$, und deuten wir diese Substitution durch Einschließen in eckige Klammern an, so geht die betrachtete Differentialgleichung (4) über in eine Gleichung

$$
\frac{d^2 y_0'}{dy_0^2} = [\alpha_0] - 3[\alpha_1] \frac{dy_0'}{dy_0} + 3[\alpha_2] \Big(\frac{dy_0'}{dy_0}\Big)^2 - [\alpha_3] \Big(\frac{dy_0'}{dy_0}\Big)^3.
$$

Die entsprechenden Gleichungen (I) bis (IV) erhalten bei dieser Einführung der Anfangswerte, wenn wir außerdem noch x, y, y' die speziellen Werte x_0, y_0, y_0' erteilen und beachten, daß

$$
[|y; u, v|]_0 = 0
$$

$$
[|y'; u, v|]_0 = 0
$$

$$
[(\alpha y)^k (\alpha y')^{3-k}]_0 = [\alpha_k]
$$

wird, die Form:

$$(\mathrm{I}') \qquad [\alpha_3] = 0$$

$$(\mathrm{II}') \qquad [\alpha_2] = 0$$

$$(\mathrm{III}') \qquad 6[\alpha_1] = -(\omega_{y'y'})_0$$

$$(\mathrm{IV}') \qquad 6[\alpha_0] = \left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\omega_{yy'}\right)_0,$$

wo der Index 0 an den Klammern anzeigen soll, daß wir x, y, y' die speziellen Werte x_0, y_0, y'_0 erteilt haben. Durch die letzten Gleichungen sind die Größen $[\alpha_\varkappa]$ vollkommen bestimmt und wir können ohne weiteres den folgenden Satz aussprechen:

„Kennen wir eine Lösung $\omega(x, y, y')$ der Differentialgleichung (18) und benutzen wir bei der Integration von $y'' = \omega$ die Anfangswerte y_0, y'_0 von y, y' für $x = x_0$ als Integrationskonstanten, so ist die der Differentialgleichung $y'' = \omega$ zugehörige Differentialgleichung in den Integrationskonstanten auch ohne Integration vollkommen bestimmt. Sie hat die Form:

$$\frac{d^2 y'_0}{d y_0^2} = \tfrac{1}{6}\left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\omega_{yy'}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(\omega_{y'y'})_0 \cdot \frac{dy'_0}{dy_0}.\text{“}$$

Da $[\alpha_3] = [\alpha_2] = 0$ ist, so ergibt sich sofort der zweite Satz:

„Jede Differentialgleichung von der Form

$$b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 \cdot b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$$

läßt sich durch eine Punkttransformation in eine Gleichung von der Form

$$b'' = \bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_1 b'$$

überführen.“

Wir gingen von einer Differentialgleichung $y'' = \omega$ aus und ordneten dieser die Gesamtheit derjenigen Differentialgleichungen in a und b zu, die wir aus der Integralgleichung $y = f(x, a, b)$ erhielten, wie wir auch die a und b bestimmen mochten. Führen wir jetzt in die Gleichung $y = f(x, a, b)$ oder was auf dasselbe hinauskommt in $y'' = \omega$ neue Veränderliche durch die auflösbaren Gleichungen:

$$x = \mathfrak{X}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \qquad y = \mathfrak{Y}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

ein, so erhalten wir als Differentialgleichung:

$$\mathfrak{y}'' = \Omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}').$$

Aus der Art, wie wir die Zuordnung der Differentialgleichungen $y'' = \omega$ und $b'' = \varphi$ definierten, folgt dann augenscheinlich: Die Gesamtheit der Differentialgleichungen in a und b, welche wir der Differentialgleichung $y'' = \omega$ zuordneten, ist in genau derselben Weise jeder Differentialgleichung $\mathfrak{y}'' = \Omega$ zugeordnet, welche aus $y'' = \omega$ durch Ausführung irgend einer Punkttransformation erhalten wird. Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

„Kennen wir eine Funktion ω, die eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (18) ist, bilden wir dann die Differentialgleichung $y'' = \omega$ und führen wir hierin durch eine beliebige Punkttransformation neue Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ein, so daß wir eine Differentialgleichung $\mathfrak{y}'' = \Omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ erhalten, so wird die Funktion Ω ebenfalls eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (18) sein."

Aus dem letzten Satze können wir einige weitere Schlüsse ziehen, sobald die Differentialgleichung $y'' = \omega$ selbst wieder einer der früher erwähnten invarianten Kategorieen von Differentialgleichungen angehört.

Wir wollen uns auf den einfachsten Fall beschränken, also untersuchen, ob eine Differentialgleichung $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3 = 0$ der Bedingung (18) genügen kann und wann dies eintritt. Hierzu haben wir ω einfach in die Gleichung (18) einzusetzen.

Berechnen wir die totalen Differentialquotienten in dieser Gleichung, so erhalten wir die Gleichung (18) in der Form:

$$(18') \begin{cases} -\omega_{xxy'y'} - \omega_x \cdot \omega_{y'y'y'} + 4\omega_{xyy'} + \omega_{y'}\omega_{xy'y'} + 3\omega_y\omega_{y'y'} \\ \quad - 6\omega_{yy} - 4\omega_{y'}\omega_{yy'} + y'(-2\omega_{xyy'y'} - \omega_y\omega_{y'y'y'} + 4\omega_{yyy'} \\ \quad + \omega_{y'} \cdot \omega_{yy'y'}) - y'^2\omega_{yyy'y'} + \omega(-2\omega_{xy'y'y'} + 3\omega_{yy'y'}) \\ \quad - \omega^2\omega_{y'y'y'y'} - 2\omega\omega_{yy'y'y'} \cdot y' = 0. \end{cases}$$

Setzen wir hierin $\omega = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ ein, so erhalten wir eine Gleichung, die in x, y, y' identisch erfüllt sein muß, wenn ω eine Lösung von (18) darstellen soll, und da diese Gleichung y' nur explizite enthält und nach Potenzen von y' geordnet werden kann, so müssen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y' identisch verschwinden. Führen wir die entsprechenden Rechnungen aus, so erhalten wir für die ω_k die Gleichungen:

$$(19) \begin{cases} \omega_{3_{xx}} + 2\omega_{2_{xy}} + \omega_{1_{yy}} - 3\omega_1\omega_{3_x} - 3\omega_{1_x}\omega_3 - 2\omega_{0_y}\omega_3 - \omega_0\omega_{3_y} \\ \qquad + 3\omega_2\omega_{1_y} + 6\omega_2\omega_{2_x} = 0 \\ \omega_{0_{yy}} + 2\omega_{1_{xy}} + \omega_{2_{xx}} - 3\omega_2\omega_{0_y} - 3\omega_0\omega_{2_y} - 2\omega_0\omega_{3_x} - \omega_3\omega_{0_x} \\ \qquad + 3\omega_1\omega_{2_x} + 6\omega_1\omega_{1_y} = 0. \end{cases}$$

Wir haben somit gefunden:

Ist $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ und bestehen zwischen den Funktionen ω_k die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (19), so haben die der Differentialgleichung $y'' = \omega$ entsprechenden Differentialgleichungen in a und b sicher die Form $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$.

Der Inbegriff aller Differentialgleichungen, welche aus $y'' = \omega$ durch Ausführung aller Punkttransformationen hervorgehen, ist in genau derselben Weise jeder einzelnen Differentialgleichung $b'' = \varphi$ zugeordnet, wie die Gesamtheit aller Differentialgleichungen, die aus $b'' = \varphi$ durch alle Punkttransformationen erhalten werden, jeder einzelnen Differentialgleichung $y'' = \omega$ zugeordnet ist. Entsprechen insbesondere einer Differentialgleichung $b'' = \varphi$ Gleichungen von der Form:

$$y'' = \omega = \omega_0(x, y) - 3\omega_1(x, y) \cdot y' + 3\omega_2(x, y)y'^2 - \omega_3(x, y)y'^3,$$

so muß φ notwendig eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(20) - \frac{d^2\varphi_{b'b'}}{da^2} + 4\frac{d\varphi_{bb'}}{da} - 6\varphi_{bb} - \varphi_{b'}\left(-\frac{d\varphi_{b'b'}}{da} + 4\varphi_{bb'}\right) + 3\varphi_b\varphi_{b'b'} = 0$$

sein.

Ist außerdem ω eine Lösung der Gleichung (18), bestehen also zwischen den ω_k die Gleichungen (19), so ist

$$b'' = \varphi = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$$

und da φ eine Lösung der Gleichung (20) ist, so müssen zwischen den Koeffizienten α_k die entsprechenden Relationen:

$$(21) \begin{cases} \alpha_{3_{aa}} + 2\alpha_{2_{ab}} + \alpha_{1_{bb}} - 3\alpha_1\alpha_{3_a} - 3\alpha_{1_a}\alpha_3 - 2\alpha_{0_b}\alpha_3 - \alpha_0\alpha_{3_b} \\ \qquad + 3\alpha_2\alpha_{1_b} + 6\alpha_2\alpha_{2_a} = 0 \\ \alpha_{0_{bb}} + 2\alpha_{1_{ab}} + \alpha_{2_{aa}} - 3\alpha_2\alpha_{0_b} - 3\alpha_0\alpha_{2_b} - 2\alpha_0\alpha_{3_a} - \alpha_3\alpha_{0_a} \\ \qquad + 3\alpha_1\alpha_{2_a} + 6\alpha_1\alpha_{1_b} = 0 \end{cases}$$

bestehen, wie zwischen den ω_k. Wir kommen so zu dem Endergebnis:

„Ist

$$y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$$

und bestehen zwischen den Funktionen ω_k die Relationen (19), so haben die der Differentialgleichung $y'' = \omega$ entsprechenden Differentialgleichungen in a und b notwendig die Form

$$b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$$

und es genügen die hier auftretenden Funktionen α_k ihrerseits den Bedingungen (21)."

Wir nehmen jetzt an, es sei $b'' = \varphi = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ und die zugehörige Differentialgleichung sei $y'' = \omega = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$. Dann genügen die $\alpha_\varkappa$ den Gleichungen (21) und die ω_k den Gleichungen (19). Die Gleichung $y'' = \omega = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ läßt sich stets durch eine Punkttransformation auf die Form:

$$y'' = \overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_1 y' = \overline{\omega}$$

bringen. Führen wir jetzt in die Differentialgleichung $b'' = \varphi$ die Anfangswerte ein, wie sie sich bei der Integration von $y'' = \overline{\omega}$ ergeben, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y_0'}{d y_0^2} = \frac{1}{6}\left(-\frac{d\overline{\omega}_{y'y'}}{dx} + 4\overline{\omega}_{yy'}\right)_0 + \frac{1}{2}(\overline{\omega}_{y'y'})_0 \frac{dy_0'}{dy_0}$$

oder, wenn wir für $\overline{\omega}$ seinen Wert einsetzen:

$$\frac{d^2 y_0'}{d y_0^2} = \frac{2}{3}(\overline{\omega}_{1y})_0 .$$

Genügen in der Differentialgleichung $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ die Funktionen α_k den Bedingungen (21), so gibt es also stets eine Punkttransformation, welche die gegebene Gleichung in eine Gleichung $b'' = \overline{\varphi}(a, b)$ überführt.

Unter den gemachten Voraussetzungen gelten dieselben Betrachtungen auch für $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' - 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$, diese Gleichung läßt sich auch auf die Form $y'' = \overline{\overline{\omega}}(x, y)$ bringen. Führen wir jetzt in $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ die Anfangswerte ein, wie sie sich bei der Integration der Gleichung $y'' = \overline{\overline{\omega}}(x, y)$ ergeben, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y_0'}{d y_0^2} = 0.$$

Wir kommen zu dem Ergebnis:

„Genügen in der Differentialgleichung $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ die Funktionen α_k den Bedingungen (21), so läßt sich die Gleichung durch eine Punkttransformation stets auf die Form $b'' = 0$ bringen. Die zur Differentialgleichung $b'' = \varphi$ gehörende Differentialgleichung in x, y hat die Form $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ und läßt sich, da die ω_k den Gleichungen (19) genügen, stets auf die Form $y'' = 0$ reduzieren."

Wir können noch nachweisen, daß die Gleichungen (21) auch notwendig sind, damit sich $b'' = \varphi(a, b, b')$ auf $b'' = 0$ zurückführen läßt. Wir nehmen an, die Reduktion sei ausführbar. Die Gleichung $b'' = 0$ hat die Form $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$, es sind nur $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, die Gleichungen (21) sind also sicher erfüllt. Demnach haben die der Gleichung $b'' = 0$ zugehörigen Differentialgleichungen in x, y sicher die Form $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$. Sie entsprechen der Gleichung $b'' = 0$ in genau derselben Weise, wie jeder aus $b'' = 0$ durch irgend eine Punkttransformation hervorgegangenen Gleichung, also auch der gegebenen Gleichung $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$. Damit sich zwei Gleichungen $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ und $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + \alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ entsprechen können, ist notwendig und hinreichend, daß die Relationen (19) respektive (21) bestehen. Wir erhalten also, da dieselben Betrachtungen auch für die Differentialgleichung $y'' = \omega$ gelten, den Satz:

Soll sich eine Differentialgleichung $y'' = \omega(x, y, y')$ durch eine Punkttransformation auf die Form $y'' = 0$ bringen lassen, so ist notwendig und hinreichend, daß sie die Form:

$$y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3 \tag{4}$$

hat und daß die Funktionen $\omega_k(x, y)$ den partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \omega_{3_{xx}} + 2\omega_{2_{xy}} + \omega_{1_{yy}} - 3\omega_1\omega_{3_x} - 3\omega_{1_x}\omega_3 - 2\omega_{0_y}\omega_3 - \omega_0\omega_{3_y} \\ \qquad + 3\omega_2\omega_{1_y} + 6\omega_2\omega_{2_x} = 0 \\ \omega_{0_{yy}} + 2\omega_{1_{xy}} + \omega_{2_{xx}} - 3\omega_2\omega_{0_y} - 3\omega_{2_y}\omega_0 - 2\omega_{3_x}\omega_0 - \omega_3\omega_{0_x} \\ \qquad + 3\omega_1\omega_{2_x} + 6\omega_1\omega_{1_y} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

genügen."

Dieser Satz ist auf andere Weise bereits von Tresse bewiesen worden. (Vergl. M. A. Tresse, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ — Preisschrift der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1896. — Siehe daselbst Seite 56, théorème VII.) Die Gleichung $H = 0$ von Tresse ist genau unsere Gleichung (18), die ja dann und nur dann erfüllt ist, wenn die ω_k den Gleichungen (19) genügen.

Die Gleichungen (19) hat außerdem explizite Arthur Graham Hall in seiner Dissertation „Bestimmung der Definitionsgleichung aller endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene“ (Leipzig 1902) gefunden und zwar als Integrabilitätsbedingungen für die Definitionsgleichungen der allgemeinsten achtgliedrigen Gruppe von Punkttransformationen, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene ähnlich ist. (Siehe daselbst Seite 19.) Unsere Gleichungen verwandeln sich in die Gleichungen $\mathfrak{U} = 0$, $\mathfrak{V} = 0$ von Hall, wenn wir setzen:

$$\omega_0 = -\beta, \quad 3\omega_1 = \varphi; \quad 3\omega_2 = -\psi, \quad \omega_3 = \Theta.$$

In der Abhandlung: Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten III (Archiv for Mathematik Bd. 8 S. 371—382, Christiania 1883) erledigt Lie das Problem, eine vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der man weiß, daß sie die Form $y'' = 0$ erhalten kann, auf diese Form zu bringen. Weil er dabei das Hauptgewicht auf die erforderlichen Integrationsoperationen legt, entwickelt er die Bedingungen für die Überführbarkeit nicht ausdrücklich, man kann sie aber ohne weiteres aus seinen Formeln herleiten.

Kapitel III.

Zweiter Spezialfall: b'' ist eine rationale Funktion von b'.

Wir wollen jetzt untersuchen, welchen Bedingungen die Funktion ω genügen muß, damit die der Differentialgleichung $y'' = \omega(x, y, y')$ entsprechende Differentialgleichung in a und b die Form hat:

$$b'' = \frac{g_{m+3}(b')}{g_m(b')},$$

wobei $g_k(b')$ eine ganze rationale Funktion $k$ten Grades mit Funktionen von a und b als Koeffizienten bezeichnen soll und wo g_{m+3} und g_m als teilerfremd vorausgesetzt werden. Wir können die Gleichung in der Form

$$b'' = \frac{(\alpha_b - \alpha_a b')^{m+3}}{(\beta_b - \beta_a b')^m} \tag{22}$$

gegeben denken, wenn wir festsetzen, daß:

$$\alpha_a^i \alpha_b^{m+3-i} = \alpha_i(a, b) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m+3)$$
$$\beta_a^k \beta_b^{m-k} = \beta_k(a, b) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

sein soll, daß dagegen α_a, α_b, β_a, β_b für sich oder in anderen Verbindungen keine Bedeutung haben sollen.

Vermöge der Gleichungen (9) erhalten wir als notwendige und zugleich hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung (22) die Gleichung:

$$|y; y, y|(\beta_a y_a + \beta_b y_b)^m = (\alpha_a y_a + \alpha_b y_b)^{m+3},$$

wofür wir, entsprechend wie in dem vorigen Falle, kürzer schreiben wollen:

$$|y; y, y|(\beta y)^m = (\alpha y)^{m+3}. \tag{23}$$

Die Gleichung (23), die in x identisch erfüllt sein muß, hat die Form:

$$\sum_0^m {}^i \beta_i(a, b) \cdot f_i(x, a, b) = \sum_0^{m+3} {}^k \alpha_k(a, b) \cdot g_k(x, a, b). \tag{23'}$$

Dabei ist:

$$f_i = |y; y, y| \binom{m}{i} y_b^{m-i} y_a^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

$$g_k = \binom{m+3}{k} y_b^{m+3-k} y_a^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m+3)$$

Soll eine Gleichung von der Form (23′) bestehen, so müssen die Funktionen g_k, f_i gewissen Bedingungen genügen, denn sind uns ganz allgemein $n + 1$ Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ gegeben, so gelten die folgenden Sätze, die wir, da sie bekannt sind, hier ohne Beweis anführen wollen:

„Soll zwischen $n + 1$ Funktionen $f_0(x)$, ..., $f_n(x)$ eine und nur eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen:

$$\sum_{0}^{n} {}_k c_k f_k(x) = 0$$

so muß die dem Gleichungssystem:

$$\sum_{0}^{n} {}_k c_k f_k(x) \;= 0$$

$$\sum_{0}^{n} {}_k c_k f_k^{(\nu)}(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

entsprechende Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & \cdots, & f_n \\ f_0', & f_1', & f_2', & \cdots, & f_n' \\ f_0'', & f_1'', & f_2'', & \cdots, & f_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots, & \cdot \\ f_0^{(n)}, & f_1^{(n)}, & f_2^{(n)} & \cdots, & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

verschwinden, ohne daß alle in den ersten n Zeilen von D enthaltenen $n$reihigen Determinanten identisch gleich Null werden.“

„Verschwinden in der zu dem Gleichungssysteme

$$\sum_{0}^{n} {}_k c_k f_k = 0,$$

$$\sum_{0}^{n} {}_k c_k f_k^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l)$$

gehörenden Matrix

$$M = \begin{vmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & \cdots, & f_n \\ f_0', & f_1', & f_2', & \cdots, & f_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots, & \cdot \\ f_0^{(l)}, & f_1^{(l)}, & f_2^{(l)} & \cdots, & f_n^{(l)} \end{vmatrix}$$

alle $(l+1)$reihigen Determinanten, während andererseits die Matrix der ersten l Zeilen von M den Rang l hat, so bestehen zwischen den Funktionen $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$

stets genau $n-l+1$ unabhängige lineare Relationen mit konstanten Koeffizienten."

Statt des Gleichungssystems:

$$F_0 = \sum_0^n {}^k c_k f_k = 0$$

$$F_\nu = \sum_0^n {}^k c_k f_k^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

werden wir bei den speziellen Rechnungen ein Gleichungssystem von der Form:

$$F_0 = 0,$$

$$\sum_0^h {}^\nu \varphi_{h\nu} F_\nu = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

betrachten, worin jedes φ_{hh} eine bestimmte von Null verschiedene Zahl ist, während die $\varphi_{h\nu}$, $h > \nu$ beliebige Funktionen von x sind. Dies System ist mit dem ursprünglichen System

$$F_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

äquivalent. Außerdem hat es die Eigenschaft, daß die l ersten Gleichungen des neuen Systems den l ersten Gleichungen des alten Systems für jeden Wert $l = 1, 2, \ldots$ äquivalent sind. Bilden wir die dem neuen Gleichungssystem für die c_k entsprechende Matrix, so folgt aus dem soeben Gesagten nach bekannten Determinantensätzen, daß der Rang dieser Matrix genau derselbe ist, wie der Rang der zu dem alten System gehörenden Matrix, wie wir auch m wählen mögen.

Die Gleichung

$$F_0 = \sum_0^n {}^k c_k f_k = 0$$

hat in dem jetzt zu betrachtenden Falle die Form:

$$(\beta y)^m \cdot | y; y, y | = (\alpha y)^{m+3} \tag{23}$$

Diese Gleichung ist zu differentiieren. Für das Symbol (βy) und entsprechend für (αy) ergibt sich aus der Definition sofort die Differentiationsregel:

$$\frac{d}{dx}\{(\beta u_1)(\beta u_2)\cdots(\beta u_m)\}$$
$$= \sum_1^m {}^i (\beta u_1)(\beta u_2)\cdots(\beta u_{i-1})(\beta u_i')(\beta u_{i+1})\cdots(\beta u_m)$$

Der Differentialquotient von $|y; y, y|$ ist uns bereits bekannt, denn es bildete $|y; y, y|$ die eine Seite der Gleichung (I) des bereits erledigten Falles. Dem Ausdruck $|y; y, y|$ entsprechen gewisse Ausdrücke in den Gleichungen (II) bis (V) und da die Rechnungen in dem jetzt zu betrachtenden Falle denen des vorigen Falles völlig analog sind, so dürfen wir vermuten, daß es von Vorteil ist, für diese Ausdrücke kürzere Bezeichnungen einzuführen. Wir werden setzen:

$$|y; y, y| = A_0$$

$$|y'; y, y| + 2\,|y; y, y'| = 1!\,A_1$$

$$-\,\omega_{y'y'}\Delta^2 + 2\,|y; y', y'| + 4\,|y'; y, y'| = 2!\,A_2$$

$$\left(-\frac{d\,\omega_{y'y'}}{dx} + 4\,\omega_{yy'}\right)\Delta^2 + 6\cdot|y'; y', y'| = 3!\,A_3$$

$$\left(-\frac{d^2\omega_{y'y'}}{dx^2} + 4\,\frac{d\,\omega_{y'y}}{dx} - 6\,\omega_{yy} - \omega_{y'}\left(-\frac{d\,\omega_{y'y'}}{dx} + 4\,\omega_{yy'}\right) + \right.$$
$$\left. + 3\,\omega_y\omega_{y'y'}\right)\Delta^2 = 4!\,A_4.$$

Von besonderem Nutzen ist es, daß wir die Differentialquotienten von A_0, A_1, A_2, A_3 bereits kennen, denn aus der Ableitung der Gleichungen (II) bis (V) des vorigen Falles ergibt sich sofort:

$$\frac{dA_0}{dx} = A_1$$

$$\frac{dA_1}{dx} = 2\,A_2 + \omega_{y'}A_1 + 3\,\omega_y A_0$$

$$\frac{dA_2}{dx} = 3\,A_3 + 2\,\omega_{y'}A_2 + 2\,\omega_y A_1$$

$$\frac{dA_3}{dx} = 4\,A_4 + 3\,\omega_{y'}A_3 + \omega_y A_2$$

Wenden wir diese Bezeichnungsweise an, so erhält die Gleichung (23) die Form:

$$\text{(I)}\qquad (\beta y)^m\cdot A_0 = (\alpha y)^{m+3}.$$

Durch Differentiation nach x folgt die Gleichung:

$$\text{(II)}\qquad (\beta y)^m A_1 + m\,(\beta y)^{m-1}(\beta y')A_0 = (m+3)\,(\alpha y)^{m+2}(\alpha y').$$

Differentiieren wir diese Gleichung nach x und ziehen wir von der so erhaltenen Gleichung die Gleichung (I) multipliziert mit $(m+3)\omega_y$ und die Gleichung (II) multipliziert mit $\omega_{y'}$ ab und dividieren wir schließlich die Gleichung noch durch 2, so erhalten wir:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} (\beta y)^m A_2 + m(\beta y)^{m-1}(\beta y')A_1 + \binom{m}{2}(\beta y)^{m-2}(\beta y')^2 A_0 = \\ \qquad = \binom{m+3}{2}(\alpha y)^{m+1}(\alpha y')^2 \end{cases}$$

Diese Gleichung ist nochmals zu differentiieren. Subtrahieren wir dann von der erhaltenen Gleichung die Gleichung (II) multipliziert mit $(m+2)\omega_y$ und die Gleichung (III) multipliziert mit $2\omega_{y'}$ und dividieren wir noch durch 3, so ergibt sich die Gleichung:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} (\beta y)^m A_3 + m(\beta y)^{m-1}(\beta y')A_2 + \binom{m}{2}(\beta y)^{m-2}(\beta y')^2 A_1 + \\ \qquad + \binom{m}{3}(\beta y)^{m-3}(\beta y')^3 A_0 = \binom{m+3}{3}(\alpha y)^m(\alpha y')^3 \end{cases}$$

Um das Bildungsgesetz der Gleichung zu erkennen, differentiieren wir nochmals und erhalten durch Subtraktion der mit $(m+1)\omega_y$ multiplizierten Gleichung (III) und der mit $3\omega_{y'}$ multiplizierten Gleichung (IV) und schließlich durch Division durch 4 die Gleichung:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} (\beta y)^m A_4 + m(\beta y)^{m-1}(\beta y')A_3 + \binom{m}{2}(\beta y)^{m-2}(\beta y')^2 A_2 + \\ \qquad + \binom{m}{3}(\beta y)^{m-3}(\beta y')^3 A_1 + \binom{m}{4}(\beta y)^{m-4}(\beta y')^4 A_0 = \\ \qquad = \binom{m+3}{4}(\alpha y)^{m-1}(\alpha y')^4 \end{cases}$$

Vergleichen wir die Gleichungen (I) bis (V) miteinander, so erkennen wir sofort, daß sie die gemeinsame Form

$$\text{(24)} \quad \sum_0^k{}_{\nu} \binom{m}{\nu}(\beta y)^{m-\nu}(\beta y')^{\nu} A_{k-\nu} = \binom{m+3}{k}(\alpha y)^{m+3-k}(\alpha y')^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 4)$$

besitzen, wobei k die Anzahl der Differentiationen angibt, die notwendig sind, um die betreffende Gleichung abzuleiten. Die hier auftretenden Größen A_i genügen ebenfalls einem einfachen Bildungsgesetz. Es ist nach der Definition:

$$A_1 = \frac{d A_0}{d x}$$

$$2 \cdot A_2 = \frac{d A_1}{d x} - \omega_{y'} A_1 - 3 \omega_y A_0$$

$$3 \cdot A_3 = \frac{d A_2}{d x} - 2 \omega_{y'} A_2 - 2 \omega_y A_1$$

$$4 \cdot A_4 = \frac{d A_3}{d x} - 3 \omega_{y'} A_3 - \omega_y A_2$$

Diese Gleichungen zeigen, daß für $i = 0, 1, 2, 3$ die folgende Formel besteht:

$$(25) \qquad (i+1) A_{i+1} = \frac{d A_i}{d x} - i \cdot \omega_{y'} A_i + (i-4) \omega_y A_{i-1},$$

wobei wir freilich festsetzen müssen, daß $A_{-1} = 0$ ist.

Die angewendeten Rechnungen lassen erkennen, daß die Gleichung (24) gebildet für $k = l + 1$ aus den Gleichungen (24) gebildet für $k = l$ und $k = l - 1$ folgte, indem wir die für $k = l$ abgeleitete Gleichung nach x differentiierten, von der durch Differentiation erhaltenen Gleichung die differentiierte Gleichung mit $l \cdot \omega_{y'}$ multipliziert und die vorhergehende Gleichung mit $(m + 4 - l)\, \omega_y$ multipliziert abzogen und die erhaltene Gleichung durch $l + 1$ dividierten.

Diese Operation wollen wir uns genau $n$mal ausgeführt denken und wollen voraussetzen, daß alle auf diesem Wege erhaltenen Gleichungen die allgemeine Form (24) haben für $k = 1, 2, \cdots, n-1, n$. Dabei nehmen wir an, daß die auftretenden Größen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ alle mit Hilfe der Rekursionsformel (25) bestimmt sind, wir werden uns überhaupt durch diese Formel ganz allgemein eine Reihe von beliebig vielen Größen $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ definiert denken. Die Differentialquotienten der A_i ergeben sich sofort aus der Definition, es ist:

$$(25') \qquad \frac{d A_i}{d x} = (i+1) A_{i+1} + i \cdot \omega_{y'} A_i - (i-4) \omega_y A_{i-1}$$

Wir wenden jetzt unsere Rechenoperation auf die letzte Gleichung, deren Bestehen wir voraussetzten, gebildet für $k = n$, an. Diese Gleichung lautet:

$$\sum_0^n {}_\nu \binom{m}{\nu} (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^\nu A_{n-\nu} = \binom{m+3}{n} (\alpha y)^{m+3-n} (\alpha y')^n.$$

Durch Differentiation finden wir:

$$\sum_0^n \binom{m}{\nu} (m - \nu) (\beta y)^{m-1-\nu} (\beta y')^{\nu+1} A_{n-\nu}$$

$$+ \omega_y \cdot \sum_0^n \binom{m}{\nu} \nu (\beta y)^{m+1-\nu} (\beta y')^{\nu-1} A_{n-\nu}$$

$$+ \omega_{y'} \sum_0^n \binom{m}{\nu} \nu \cdot (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^{\nu} A_{n-\nu}$$

$$+ \sum_0^n \binom{m}{\nu} (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^{\nu} \{(n - \nu + 1) A_{n-\nu+1}$$

$$+ (n - \nu) \omega_{y'} A_{n-\nu} - (n - \nu - 4) \omega_y A_{n-\nu-1}\}$$

$$= \omega_y \cdot n \cdot \binom{m+3}{n} (\alpha y)^{m+4-n} (\alpha y')^{n-1}$$

$$+ \omega_{y'} \cdot n \binom{m+3}{n} (\alpha y)^{m+3-n} (\alpha y')^{n}$$

$$+ \binom{m+3}{n} (m + 3 - n) (\alpha y)^{m+2-n} (\alpha y')^{n+1}.$$

Ersetzen wir in der ersten Summe den Summationsbuchstaben ν durch $\mu = \nu + 1$ und beachten wir, daß

$$\binom{m}{\nu} \cdot (m - \nu) = \binom{m}{\mu - 1} (m - \mu + 1) = \binom{m}{\mu} \cdot \mu$$

wird, so können wir die neue Summe statt von 1 bis $n + 1$ formell von Null an erstrecken. In der zweiten Summe ersetzen wir ν durch $\lambda = \nu - 1$, wobei wir zu beachten haben, daß für $\nu = 0$ der betreffende Summand verschwindet und daß

$$\binom{m}{\nu} \nu = \binom{m}{\lambda + 1} (\lambda + 1) = \binom{m}{\lambda} (m - \lambda)$$

wird. Es ist ferner:

$$A_{-1} = 0$$

$$(m + 3 - n) \binom{m+3}{n} = \binom{m+3}{n+1} (n + 1)$$

$$n \cdot \binom{m+3}{n} = \binom{m+3}{n-1} (m + 4 - n)$$

Setzen wir alle diese Werte in die durch die Differentiation gefundene Gleichung ein, so nimmt diese, wenn wir noch statt λ und μ jetzt ν schreiben, die Form an:

$$(n+1)\sum_0^{n+1}{}_{\nu}\binom{m}{\nu}(\beta y)^{m-\nu}(\beta y')^{\nu}A_{n+1-\nu}$$

$$+\,n\cdot\omega_{y'}\sum_0^{n}{}_{\nu}\binom{m}{\nu}(\beta y)^{m-\nu}(\beta y')^{\nu}A_{n-\nu}$$

$$+(m+4-n)\omega_y\sum_0^{n-1}{}_{\nu}\binom{m}{\nu}(\beta y)^{m-\nu}(\beta y')^{\nu}A_{n-1-\nu}$$

$$=(m+4-n)\omega_y\cdot\binom{m+3}{n-1}(\alpha y)^{m+3-(n-1)}(\alpha y')^{n-1}$$

$$+\,n\cdot\omega_{y'}\cdot\binom{m+3}{n}(\alpha y)^{m+3-n}(\alpha y')^{n}$$

$$+\,(n+1)\binom{m+3}{n+1}(\alpha y)^{m+3-(n+1)}(\alpha y')^{n+1}$$

Nach unserem allgemeinen Verfahren haben wir von dieser Gleichung die Gleichung (24) gebildet für $k=n$, multipliziert mit $n\cdot\omega_{y'}$ und für $k=n-1$ multipliziert mit $(m+4-n)\omega_y$ abzuziehen und die so gefundene Gleichung noch durch $n+1$ zu dividieren. Wir erhalten dann die Gleichung:

$$\sum_0^{n+1}{}_{\nu}\binom{m}{\nu}(\beta y)^{m-\nu}(\beta y')^{\nu}A_{n+1-\nu}=\binom{m+3}{n+1}(\alpha y)^{m+3-(n+1)}(\alpha y')^{n+1}$$

Dies ist aber die Gleichung (24) gebildet für $k=n+1$. Für $k=0,1,\cdots,4$ wurde direkt nachgewiesen, daß die Gleichung (24) wirklich besteht, demnach haben wir das Bestehen der Gleichung (24) für jeden beliebigen Wert $k=0,1,2,\ldots$ bewiesen.

Für den Fall, daß $k>m$ wird, ist noch zu beachten, daß $\binom{r}{s}=0$ zu setzen ist, sobald $s>r$ ist.

Wir können jetzt ganz allgemein den folgenden Satz aussprechen:

„Differentiieren wir die Gleichung:

$$(\beta y)^m A_0=(\alpha y)^{m+3} \tag{23}$$

nach x, so erhalten wir die Gleichung:

$$(\beta y)^m A_1+m(\beta y)^{m-1}(\beta y')A_0=(m+3)(\alpha y)^{m+2}(\alpha y').$$

Stellen wir dann ein System von beliebig vielen Gleichungen auf, indem wir die letzte jeweils bekannte Gleichung, es sei dies die $(n+1)$te Gleichung, nach x differentiieren, von der so erhaltenen Gleichung die

differentiierte Gleichung mit $n \cdot \omega_{y'}$ multipliziert und die vorletzte bekannte Gleichung mit $(m+4-n)\omega_y$ multipliziert abziehen und dann die ganze Gleichung durch $n+1$ dividieren, so erhalten wir ein Gleichungssystem, dessen Gleichungen allgemein die Form haben

$$(24) \quad \left\{ \sum_{0}^{k} {}^{\nu} \binom{m}{\nu} (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^{\nu} A_{k-\nu} = \binom{m+3}{k} (\alpha y)^{m+3-k} (\alpha y')^{k} \right. \quad (k=0,1,\ldots)$$

wobei $\binom{r}{s} = 0$ zu setzen ist, sobald $s > r$ wird. Hierbei bezeichnet k die Anzahl der Differentiationen, die notwendig sind, um die betreffende Gleichung aufzustellen. Die auftretenden Größen A_0, $A_1, \ldots$ lassen sich alle aus

$$A_0 = | y; y, y |$$

mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(25) \qquad (i+1) A_{i+1} = \frac{dA_i}{dx} - i\omega_{y'} A_i + (i-4)\omega_y A_{i-1} \qquad (i=0,1,\ldots)$$

berechnen, wenn wir $A_{-1} \equiv 0$ setzen.“

Stellen wir die Gleichungen (24) für $k = 0, 1, \ldots, n$ auf, so erhalten wir, wie aus der Ableitung der Gleichungen (24) ohne weiteres folgt, ein Gleichungssystem, das dem System der Gleichungen:

$$(23'') \qquad \sum_{0}^{m} {}^{k} \beta_k f_k^{(\nu)}(x) = \sum_{0}^{m+3} {}^{i} \alpha_i g_i^{(\nu)}(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

in der auf Seite 21 angegebenen speziellen Art äquivalent ist. Wir können also statt des letzteren Systems den weiteren Untersuchungen die Gleichungen (24) zugrunde legen.

Bevor wir die gesuchte Bedingung für ω aufstellen können, müssen wir die Größen A_i noch näher betrachten. Nach der Definition kann augenscheinlich:

$$\begin{aligned} A_0 &= \varphi_0 \\ A_1 &= \varphi_1 \\ A_2 &= \varphi_2 + \psi_2 \Delta^2 \\ A_3 &= \varphi_3 + \psi_3 \Delta^2 \\ A_4 &= \qquad \psi_4 \Delta^2 \end{aligned}$$

gesetzt werden, wo die φ_i Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen von y und y' nach a und b sind, während die ψ_i

Funktionen von ω und den partiellen Ableitungen von ω nach x, y, y' bis zur $i$ten Ordnung darstellen. Nach Definition ist nun:

$$A_5 = \tfrac{1}{5}\left(\frac{d A_4}{dx} - 4\omega_{y'} A_4\right) = \tfrac{1}{5}\Delta^2\left(\frac{d\psi_4}{dx} - 2\omega_{y'}\psi_4\right)$$
$$= \Delta^2 \cdot \psi_5,$$

wobei

$$5\psi_5 = \frac{d\psi_4}{dx} - 2\omega_{y'}\psi_4$$

zu setzen ist. Hier ist ψ_5 eine Funktion von ω und dessen partiellen Ableitungen bis zur fünften Ordnung.

Nehmen wir allgemein an, daß

$$\begin{aligned} A_{i-1} &= \psi_{i-1}\Delta^2 \\ A_i &= \psi_i \Delta^2 \end{aligned} \qquad (i > 4)$$

ist, worin ψ_{i-1} und ψ_i Funktionen von ω und seinen partiellen Ableitungen bis zur $(i-1)$ten bezw. $i$ten Ordnung sind, dann wird:

$$(i+1)\, A_{i+1} = \frac{d A_i}{dx} - i\,\omega_{y'} A_i + (i-4)\,\omega_y A_{i-1}$$
$$= \left(\frac{d\psi_i}{dx} - (i-2)\,\omega_{y'}\psi_i + (i-4)\,\omega_y\psi_{i-1}\right)\Delta^2.$$

Wir werden schreiben:

$$\frac{d\psi_i}{dx} - (i-2)\,\omega_{y'}\psi_i + (i-4)\,\omega_y\psi_{i-1} = (i+1)\,\psi_{i+1}.$$

Es ist dann:

$$A_{i+1} = \psi_{i+1} \cdot \Delta^2$$

und hierin ist ψ_{i+1} eine Funktion von ω und seinen partiellen Ableitungen bis zur $(i+1)$ten Ordnung. Es gilt also allgemein:

„Ist $i \geqq 4$, so hat die Größe A_i die Form:

$$A_i = \psi_i \cdot \Delta^2, \qquad (i \geqq 4) \tag{26}$$

worin ψ_i eine Funktion von ω und seinen partiellen Ableitungen bis zur $i$ten Ordnung ist. Die Funktionen ψ_i können dabei alle aus

$$4!\,\psi_4 = -\frac{d^2\omega_{y'y'}}{dx^2} + 4\frac{d\,\omega_{yy'}}{dx} - 6\,\omega_{yy} - \omega_{y'}\left(-\frac{d\,\omega_{y'y'}}{dx} + 4\,\omega_{yy'}\right) + 3\,\omega_y\omega_{y'y'}$$

nach der Rekursionsformel:

$$(i+1)\,\psi_{i+1} = \frac{d\psi_i}{dx} - (i-2)\,\omega_{y'}\psi_i + (i-4)\,\omega_y\psi_{i-1} \qquad (i \geqq 4) \tag{27}$$

berechnet werden.“

Die Gültigkeit der Formel (27) folgt ohne weiteres aus der Definition von ψ_5 und von ψ_{i+1} für Werte $i \geqq 5$.

Um die gesuchten Bedingungen für ω aufzustellen, haben wir die Gleichung (24) für die $2m + 5$ Werte $k = 0, 1, \ldots, 2m + 4$ zu bilden und aus ihnen die α_i und β_k zu eliminieren. Die $m + 4$ Größen α_i treten nur in den ersten $m + 4$ Gleichungen auf, denn für $k \geqq m + 4$ erhalten wir, wenn wir beachten, daß $\binom{r}{s} = 0$ für $s > r$ wird, die Gleichungen in der Form:

$$\sum_0^m {}_\nu \binom{m}{\nu} (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^\nu A_{k-\nu} = 0$$
$$(k = m+4, \ldots, 2m+4).$$

Es ist $k \geqq m + 4$ und $\nu \leqq m$, also $k - \nu \geqq 4$, folglich treten in den letzten Gleichungen die Größen A_i nur für $i \geqq 4$ auf, können also nach (26) durch $\psi_i \Delta^2$ ersetzt werden und da $\Delta \not\equiv 0$ ist, wir also durch Δ dividieren dürfen, so finden wir die Gleichungen:

$$(28) \qquad \left| \sum_0^m {}_\nu \binom{m}{\nu} (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^\nu \psi_{k-\nu} = 0 \right.$$
$$(k = m+4, \ldots, 2m+4)$$

Dies sind $m + 1$ lineare homogene Gleichungen in den $m + 1$ Größen

$$\binom{m}{\nu} (\beta y)^{m-\nu} (\beta y')^\nu. \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m)$$

Diese Ausdrücke verschwinden nicht alle, denn aus $(\beta y)^m = 0$ würde eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen a und b folgen. Die Gleichungen (28) sind also stets dann und nur dann miteinander verträglich, wenn ihre Determinante identisch verschwindet:

$$(29) \qquad \begin{vmatrix} \psi_{m+4}, & \psi_{m+3}, & \psi_{m+2}, \ldots, & \psi_4 \\ \psi_{m+5}, & \psi_{m+4}, & \psi_{m+3}, \ldots, & \psi_5 \\ \psi_{m+6}, & \psi_{m+5}, & \psi_{m+4}, \ldots, & \psi_6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{2m+4}, & \psi_{2m+3}, & \psi_{2m+2}, \ldots, & \psi_{m+4} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung $(2m + 4)$ter Ordnung für ω, die notwendig erfüllt sein muß, wenn die Gleichung (23), also auch die Gleichung (22) bestehen soll.

Die Gleichungen (24) enthalten α_i, β_k nur in gewissen linearen Verbindungen, die wir folgendermaßen bezeichnen wollen:

$$\binom{m+3}{k}(\alpha y)^{m+3-k}(\alpha y')^k = \mathsf{A}_{m+3-k} \qquad (k=0,1,\ldots,m+3)$$

$$\binom{m}{\nu}(\beta y)^{m-\nu}(\beta y')^\nu \quad = \mathsf{B}_{m-\nu}. \qquad (\nu=0,1,\ldots,m)$$

Diese Verbindungen sind sicher linear unabhängig und die letzten Gleichungen sind nach den α_i, β_k auflösbar. Führen wir nämlich in der schon bekannten Weise die Anfangswerte y_0 und y_0' ein, so erhalten wir:

$$\binom{m+3}{k}[\alpha_{m+3-k}] = [\mathsf{A}_{m+3-k}]_0 \qquad (k=0,1,\ldots,m+3)$$

$$\binom{m}{\nu}[\beta_{m-\nu}] \quad = [\mathsf{B}_{m-\nu}]_0, \qquad (\nu=0,1,\ldots,m)$$

wo die eckigen Klammern und der Index 0 an den Klammern die früher festgesetzte Bedeutung haben.

Die Gleichungen (24) nehmen als Gleichungen für die A_i, B_k die Form an:

$$(24') \quad \begin{cases} \sum_0^k {}^\nu\, \mathsf{B}_{m-\nu} A_{k-\nu} = \mathsf{A}_{m+3-k} & (k=0,1,\ldots,m+3) \\ \sum_0^m {}^\nu\, \mathsf{B}_{m-\nu}\psi_{k-\nu} = 0 & (k=m+4,\ldots,2m+4) \end{cases}$$

Die ersten $m+4$ Gleichungen für $k = 0, 1, \ldots, m+3$ sind nach den $m+4$ Größen A_i aufgelöst, also sicher linear unabhängig, die Gleichungen (24′) für die Werte $k > m+3$ sind von den A_i frei, keine von ihnen kann also aus den ersten $m+4$ Gleichungen linear abgeleitet werden. Um zu bestimmen, wieviele Gleichungen des Systems (24′) linear unabhängig sind, haben wir nur festzustellen, wieviele der Gleichungen:

$$\sum_0^m {}^\nu\, \mathsf{B}_{m-\nu}\psi_{k-\nu} = 0 \qquad (k=m+4,\ldots,2m+4)$$

unabhängig sind.

Die letzten Gleichungen, gebildet für $k = m+4, \ldots, 2m+4$, sind vermöge (29) linear abhängig, folglich sind dies auch die Gleichungen (24′) in den A_i, B_k für $k = 0, 1, \ldots, 2m+4$. Da die A_i, B_k linear unabhängige Verbindungen der α_i, β_k sind und das System der Gleichungen (24′) dem System der Gleichungen:

$$(23'') \quad \sum_0^m {}^k\, \beta_k f_k^{(\nu)}(x) = \sum_0^{m+3} {}^i\, \alpha_i g_i^{(\nu)}(x) \qquad (\nu=0,1,\ldots,2m+4)$$

augenscheinlich in der auf Seite 21 angegebenen Weise äquivalent ist, so folgt, daß auch die letzten Gleichungen vermöge (29) miteinander verträglich sind.

Hat außerdem die Matrix der ersten m Zeilen von (29) den Rang m, so ergibt sich in der gleichen Weise, daß die Gleichungen (23″) für $\nu = 0, 1, \ldots, 2m + 3$ linear unabhängig sind. Es wird dann nach dem auf Seite 19 f. angeführten Satze stets eine und nur eine Gleichung (23′), also auch eine und nur eine Gleichung (23) existieren.

Soll sich der Rang der betrachteten Matrix erniedrigen, so ist notwendig und hinreichend, daß

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} \psi_{m+3}, & \psi_{m+2}, \ldots, & \psi_4 \\ \psi_{m+4}, & \psi_{m+3}, \ldots, & \psi_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{2m+2}, & \psi_{2m+1}, \ldots, & \psi_{m+3} \end{vmatrix} = 0$$

wird, denn es müssen dann entsprechend der Bildung der Gleichungen (24) für den Fall $m' = m - 1$ alle m-reihigen Determinanten derjenigen Matrix verschwinden, die aus (29) durch Weglassen der ersten Spalte folgt, diese ist aber mit der zu untersuchenden Matrix identisch.

Die Gleichung (30) ist eine Gleichung von der Form (29) gebildet nur für $m - 1$, sie sagt aus, daß in a und b stets eine und nur eine Differentialgleichung von der Form

$$b'' = \frac{g_{m+2}(b')}{g_{m-1}(b')}$$

besteht, vorausgesetzt, daß die durch Weglassen der ersten Spalte und letzten Zeile aus (30) erhaltene Determinante nicht verschwindet. Dies Verfahren können wir fortsetzen und finden, daß die der Differentialgleichung $y'' = \omega$ entsprechende Differentialgleichung in a und b für den Fall, daß außer (29) auch (30) erfüllt ist, die Form:

$$b'' = \frac{g_{m+3-k}(b')}{g_{m-k}(b')}$$

hat. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da wir voraussetzten, daß g_{m+3} und g_m in der Gleichung (22) teilerfremd sein sollten.

Somit haben wir allgemein bewiesen:

„Soll die zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \omega(x, y, y')$ gehörige Differentialgleichung in a und b die Form:

$$b'' = \frac{g_{m+3}(b')}{g_m(b')}$$

haben, worin Zähler und Nenner teilerfremd sein sollen, so ist notwendig und hinreichend, daß ω der partiellen Differentialgleichung $(2m+4)$ter Ordnung:

$$(29) \qquad \begin{vmatrix} \psi_{m+4}, & \psi_{m+3}, & \psi_{m+2}, & \ldots, & \psi_4 \\ \psi_{m+5}, & \psi_{m+4}, & \psi_{m+3}, & \ldots, & \psi_5 \\ \psi_{m+6}, & \psi_{m+5}, & \psi_{m+4}, & \ldots, & \psi_6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{2m+4}, & \psi_{2m+3}, & \psi_{2m+2}, & \ldots, & \psi_{m+4} \end{vmatrix} = 0$$

genügt, dabei jedoch nicht die Determinante identisch zum Verschwinden bringt, die wir aus (29) durch Weglassen der ersten Spalte und der letzten Zeile erhalten. Hierin ist:

$$4!\,\psi_4 = -\frac{d^2\omega_{y'y'}}{dx^2} + \frac{4\,d\omega_{yy'}}{dx} - 6\,\omega_{yy} - \omega_{y'}\left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\,\omega_{yy'}\right) + 3\,\omega_y\,\omega_{y'y'}$$

und es lassen sich die übrigen ψ_i aus ψ_4 mit Hilfe der Rekursionsformel:

$$i \cdot \psi_i = \frac{d\psi_{i-1}}{dx} - (i-3)\,\omega_{y'}\,\psi_{i-1} + (i-5)\,\omega_y\,\psi_{i-2} \qquad (i > 4)$$

berechnen.“

Wir wollen jetzt annehmen, wir kennen eine Funktion $\omega(x,y,y')$, die den Bedingungen des letzten Satzes genügt. Führen wir die Anfangswerte x_0, y_0, y'_0 in der bekannten Weise ein und deuten wiederum die Substitution $a = y_0$, $b = y'_0$ durch Einschließen in eckige Klammern und die Substitution $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ durch den Index 0 an den Klammern an, so erhalten wir, da:

$$[(\alpha y)^{m+3-k}(\alpha y')^k]_0 = [\alpha_{m+3-k}]$$

und

$$[A_0]_0 = [A_1]_0 = 0,$$
$$[A_i]_0 = [\psi_i]_0 \qquad (i > 1)$$

wird, die Gleichungen (24) in der Form:

$$(24'') \qquad \sum_{0}^{k-2} \binom{m}{r} [\psi_{k-r}]_0 [\beta_{m-r}] = \binom{m+3}{k} [\alpha_{m+3-k}]$$

$$(k = 0, 1, \ldots, 2m+3).$$

Diese Gleichungen sind unabhängig, solange x_0, y_0, y_0' ein Wertsystem allgemeiner Lage ist, sie bestimmen daher die Verhältnisse:

$$[\alpha_0] : [\alpha_1] : \cdots : [\alpha_{m+3}] : [\beta_0] : [\beta_1] : \cdots : [\beta_m]$$

vollständig. Es gilt der Satz:

„Kennen wir eine Funktion ω, die der Gleichung (29) genügt und die in dieser diejenige Determinante nicht identisch zum Verschwinden bringt, die wir aus (29) durch Weglassen der ersten Spalte und der letzten Zeile erhalten, wählen wir dann die Anfangswerte y_0, y_0' von y, y' für $x = x_0$ zu Integrationskonstanten, so ist die der Differentialgleichung $y'' = \omega$ zugeordnete Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y_0'}{d y_0^2} = \varphi\left(x_0, y_0, \frac{d y_0'}{d y_0}\right)$$

vollkommen bestimmt. Die Aufstellung der Gleichung erfordert nur die Auflösung eines Systems von $2m+4$ linearen Gleichungen.“

Die Gleichungen (24″) ergeben für $k = 0$ und $k = 1$:

$$[\alpha_{m+3}] = 0, \quad [\alpha_{m+2}] = 0.$$

Hieraus folgt:

„Jede Differentialgleichung von der Form:

$$b'' = \frac{g_{m+3}(b')}{g_m(b')},$$

in der Zähler und Nenner teilerfremd sind, läßt sich durch eine Punkttransformation auf die Form:

$$b'' = \frac{\bar{g}_{m+1}(b')}{\bar{g}_m(b')}$$

bringen.“

Schlußbemerkung.

In genau entsprechender Weise, wie den Fall einer ganzen rationalen Funktion und den einer rationalen Funktion, habe ich noch den Spezialfall einer algebraischen Gleichung zweiten Grades in b'' und den allgemeinsten Fall einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades in b'', in der der Koeffizient der höchsten Potenz von b'' eine ganze rationale Funktion von b' vom $m$ten Grade ist, erledigt, also die Bedingungen ermittelt, denen ω genügen muß, damit die der Differentialgleichung $y'' = \omega$ entsprechende Differentialgleichung in a und b die Form

$$\text{(I)} \qquad g_m(b') \cdot b''^2 + g_{m+3}(b') \cdot b'' + g_{m+6}(b') = 0$$

bezw. die Form

$$\text{(II)} \; g_m(b') \cdot b''^n + g_{m+3}(b') b''^{n-1} + g_{m+6}(b') b''^{n-2} + \cdots + \\ + g_{m+3r}(b') b''^{n-r} + \cdots + g_{m+3n}(b') = 0$$

hat, wobei vorausgesetzt ist, daß die g_i keinen gemeinsamen Teiler haben und daß sich der Grad der Gleichungen (I) bezw. (II) nicht erniedrigt.

Im Falle (I) ergibt sich, daß ω einer partiellen Differentialgleichung $(3m + 11)$ter Ordnung genügen muß, dagegen eine partielle Differentialgleichung $(3m + 8)$ter Ordnung und eine ebensolche $(2m + 10)$ter Ordnung nicht identisch erfüllen darf.

Im Falle (II) muß ω einer partiellen Differentialgleichung von der Ordnung:

$$m + 3n + \frac{n}{2}(2m + 3n - 1)$$

genügen, darf aber zwei andere partielle Differentialgleichungen nicht identisch erfüllen.

Die genauen Rechnungen und die gefundenen Ergebnisse werde ich später an anderer Stelle veröffentlichen.

Thesen.

1. Statt der Bezeichnung reine Mathematik läßt sich besser die Bezeichnung freie Mathematik anwenden.
2. Die weitere Entwicklung der Mathematik ist wesentlich beeinflußt durch die geeignete Wahl der Bezeichnungsweise und der rechnerischen Hilfsmittel.
3. Es ist falsch zu behaupten, daß eine Vorstellung des nichteuklidischen Raumes unmöglich ist, sie ist vielmehr lediglich eine Sache der Gewöhnung.

Lebenslauf.

Ich, Friedr. Wilh. Alfred Koppisch, wurde am 8. Januar 1882 als Sohn des Kaufmanns Robert Koppisch in Leipzig geboren. Den ersten Unterricht erhielt ich von Ostern 1888 ab in der IV. Bürgerschule in Leipzig. Von Ostern 1892 ab besuchte ich die Thomasschule in Leipzig, die ich Ostern 1901 mit dem Reifezeugnis wieder verließ, um in Leipzig Mathematik und Physik zu studieren. Ich besuchte Vorlesungen, Übungen und Praktika der Herren Professoren: H. Credner, Des Coudres, Engel, Gregory, Hausdorff, Heinze, Hölder, Lamprecht, Lehmann, Liebmann, Neumann, Volkelt, Wiener, Wislicenus, Wundt. Von Ostern 1904 ab setzte ich mein Studium in Greifswald fort und nahm hier teil an den Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten: Berg, R. Credner, Deecke, Engel, König, Kowalewski, Mie, Rehmke, Thomé.

In ganz besonderer Weise bin ich Herrn Professor Dr. Engel verpflichtet, der in außerordentlicher Weise mein Studium förderte, und der mir während meiner ganzen Studienzeit mit seinem Rate zur Seite stand; ihm verdanke ich auch die Anregung zu der vorliegenden Arbeit. Ich spreche ihm hierfür auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.